

7 Nevezetes azonosságok

7.1 Műveletek elvégzése

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $x(x + y) - y(x - y)$

b) $3(3a - 3b) + 5(a + b)$

c) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 3(-x - y - z)$

d) $2a^2 - a(5b - 2a) + b(b - 2a)$

e) $6a^2 - 5a(2b - a) + 4a\left(-3a + 2\frac{1}{2}b\right)$

f) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)6x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)12y$

g) $4a - 2(a - 3) - 3[a - 3(4 - 2a) + 8]$

h) $(a + b)(c + 2d)$

i) $(2x - 1)(5 - 3x)$

j) $(3a^2 - 2b)(2a^2 + 3b)$

k) $(7x^3y^2 - xy)(5xy^2 - 2x2y^2)$

l) $\left(\frac{1}{2}x^2y - \frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{2}{3}xy - 1\frac{1}{2}x^2y\right)$

m) $(4b^2 + 2a^2 - 4ab)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$

n) $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$

o) $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y)$

2. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

a) $(x - 2y)(x + 2y)$

b) $(a + 2)(a - 2)$

c) $(2x - y)(2x + y)$

d) $(2b - 3a)(2b + 3a)$

e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}b^2\right)$

g) $(0, 2a - 0, 5b)(0, 2a + 0, 5b)$

h) $\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{y}\right)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)$

$$3. (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3; (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

- | | |
|---|---|
| a) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$ | g) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$ |
| b) $(2x^2 + 3y^2)(4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4)$ | h) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ |
| c) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{4}{9}y^2\right)$ | i) $(a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$ |
| d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right)$ | j) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ |
| e) $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$ | k) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ |
| f) $(3x^2y - 2xy^2)(9x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4)$ | l) $(a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$ |

$$4. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

- | | | |
|-----------------------|---|--|
| a) $(a + 3)^2$ | m) $(a^5x - 2b^2)^2$ | t) $\left(\frac{3x}{2} - \frac{2y}{3}\right)^2$ |
| b) $(b - 2)^2$ | n) $(0, 2x + 0, 3y^2)^2$ | |
| c) $(x + 1)^2$ | o) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ | u) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{y}\right)^2$ |
| d) $(2x + 1)^2$ | | |
| e) $(3a - b)^2$ | p) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2$ | v) $\left(\frac{2}{3}a^3b^4 - 2\frac{1}{2}a^5b\right)^2$ |
| f) $(3y + x)^2$ | | |
| g) $(5a + 3b)^2$ | q) $\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right)^2$ | w) $(a^k + a)^2$ |
| h) $(a^2 + 1)^2$ | | |
| i) $(x^3 + 1)^2$ | r) $\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^3\right)^2$ | x) $\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2$ |
| j) $(x^2 + y^2)^2$ | | y) $(z^{k+1} + z^k)^2$ |
| k) $(a^3 - b^3)^2$ | | |
| l) $(2x^2 + 3xy^3)^2$ | s) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ | z) $\left(z^{k+1} + \frac{1}{z^k}\right)^2$ |

$$5. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

- | | | |
|---------------------------|---|---|
| a) $(x + a + 1)^2$ | e) $\left(x^2 - \frac{1}{2} + y\right)^2$ | g) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2$ |
| b) $(2x - y - 1)^2$ | | |
| c) $(2x^2 - 3x + 2)^2$ | f) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 2\right)^2$ | h) $\left(x^n - 1 + \frac{1}{x^n}\right)^2$ |
| d) $(3x^2y - xy + y^3)^2$ | | |

6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

a) $(a + 3)^3$

b) $(b - 2)^3$

c) $(x + 1)^3$

d) $(2x + 1)^3$

e) $(3a - b)^3$

f) $(3y + x)^3$

g) $(5a + 3b)^3$

h) $(a^2 + 1)^3$

i) $(x^3 + 1)^3$

j) $(x^2 + y^2)^3$

k) $(a^3 - b^3)^3$

l) $(2x^2 + 3xy^3)^3$

m) $(a^5x - 2b^2)^3$

n) $(x + \frac{1}{2})^3$

o) $(\frac{x}{2} - \frac{y}{3})^3$

p) $(\frac{a}{3} + \frac{b}{4})^3$

q) $(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^3)^3$

r) $(x + \frac{1}{x})^3$

s) $(\frac{3x}{2} - \frac{2y}{3})^3$

t) $(\frac{x}{2} - \frac{3}{y})^3$

u) $(a^k + a)^3$

v) $(x^n - \frac{1}{x^n})^3$

w) $(z^{k+1} + z^k)^3$

x) $(z^{k+1} + \frac{1}{z^k})^3$

7.2 Szorzattá alakítás

1. Kiemelés

a) $3xy - 6xz$

b) $a^2x + 3ax^2$

c) $15y^3 - 5y$

d) $8a^4 - 12a^2$

e) $6a^3b^2 - 8a^4b^3$

f) $ax + by + ay + bx$

g) $ax - ay + bx - by$

h) $x^2 + xy + ax + ay$

i) $a^2 + ab + ac + bc$

j) $x^3 + 3x + 3x^2 + 9$

k) $10ay - 5by + 2ax - bx$

l) $30ax - 34bx - 15a + 17b$

m) $3x^2 - 3xy + 3y^2 - 3xy$

n) $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

o) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b$

p) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$

2. Képletek alkalmazása

a) $\frac{16}{25}a^4b^2 - 9a^2b^2$

b) $0,16a^2 - \frac{1}{49}b^2$

c) $0,64a^6b^2 - \frac{4}{81}a^4b^2$

d) $(x + 2y)^2 - \frac{9}{121}(3x + y)^2$

e) $25a^4 - 10a^2b + b^2$

f) $9x^2 - 30xy + 25y^2$

g) $4x^4y^2 + 4x^2y + 1$

h) $16x^2y^2 - 40x^2y + 25x^2$

- i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}xy + \frac{9}{16}y^2$ m) $64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$
 j) $9x^2y^2 - 3xy^2 + \frac{1}{4}y^2$ n) $a^3 + 18a^2 + 108a + 215$
 k) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$ o) $27a^3 + 125b^3$
 l) $8a^6 + 60a^4 + 150a^2 + 125$ p) $x^3 - 64y^3$
 q) $125x^3 - \frac{1}{8}y^3$

3. Kiemelés és képletek alkalmazása

- a) $3xy^2 + 6xy + 3x$ i) $2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x$
 b) $12x^5y + 24x^4y + 12x^3y$ j) $64x^2 - 80x^2 - 100x + 125$
 c) $9a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4$ k) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
 d) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ l) $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1$
 e) $4a^2 - 20ab + 25b^2 - 36$ m) $25b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$
 f) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$ n) $5 + 10ax + 5a^2x^2 - 5x^2 - 10ax - 5a^2$
 g) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 2zt - t^2$ o) $(a - b)^2 + a(b - 1)^2 - b(a - 1)^2$
 h) $m^2x^2 + nx - n^2x^2 - mx$ p) $(4x + 2y)^3 + (3x - 5y)^3$
 q) $5(2x + 3)^4 + (2x + 3)^3 - (8x^3 + 27)$
 r) $30(a^2 - y^2) + 10(a + y)^2 - 100a(a + y)$

4. Egészítsd ki teljes négyzetté:

- a) $x^2 - 4x + \dots$ e) $x^2 - \dots + \frac{1}{x^2}$
 b) $4x^2 + \dots + 9y^2$ f) $100x^6y^2 + 60x^4y^3 + \dots$
 c) $\dots + 10x^3y^2 + x^2$ g) $\dots - \frac{4x}{3y} + 4x^2$
 d) $x^2 - x + \dots$

5. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

- a) $\frac{3x(a + b)}{9x^2(a + b)}$ d) $\frac{(a - b)^2}{a - b}$ g) $\frac{14x^5(2a - 3b)}{21x^3y^4(3b - 2a)}$
 b) $\frac{7a^3b^5(x + y)}{21a^2b^3(x + y)}$ e) $\frac{(a + b)^2}{(a + b)^3}$ h) $\frac{2a - 2b}{4a}$
 c) $\frac{a + b}{(a + b)^2}$ f) $\frac{8a^2b^3(x - 5)}{12ab^4(5 - x)}$ i) $\frac{6x + 6y}{12x}$

j) $\frac{4x-4y}{8a+8b}$	m) $\frac{2ax+2bx}{2ax-2bx}$	p) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$
k) $\frac{4x+4y}{12x+12y}$	n) $\frac{x^2}{x^2+xy}$	q) $\frac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2}$
l) $\frac{8x^2+4x-4}{2x^2+x-1}$	o) $\frac{ab}{a-ab}$	r) $\frac{3x^2-18x+27}{(x-3)^2}$

6. Egyszerűsítsd képletek segítségével:

a) $\frac{x^2-9}{x^3-6x^2+9x}$	h) $\frac{20x^2+20x+5}{80x^3+120x^2+60x+10}$
b) $\frac{2x^2-4xy^2}{3x^3y-6x^2y^3}$	i) $\frac{27a^3-1}{18a^2+6a+2}$
c) $\frac{a^2-a+1}{a^3+1}$	j) $\frac{6ab+18a-12b-36}{4ab+12a+4b+18}$
d) $\frac{a^2-8}{a^2+2a+4}$	k) $\frac{a^3+2a^2+2a+1}{a^6-1}$
e) $\frac{a^3+a^2y+ax+xy}{a^2-ax+ay-xy}$	l) $\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{a^4-ax^3-a^2y^2+a^3x}$
f) $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{27x^3+8y^3}$	
g) $\frac{8x^3-60ax^2+150a^2x-125a^3}{4x^2-20ax+25a^2}$	m) $\frac{(m+1)^2x^2+8(m+1)x+16}{m^2+4m-x-4}$

7. Hozd közös nevezőre:

a) $a - \frac{b}{x} - \frac{a}{x^2}$	b) $\frac{7}{4x} - \frac{2}{3y} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{x}$
c) $\frac{3c-2b}{8bc} + \frac{a-4b}{12ab} + \frac{ba-c}{6ac} - \frac{2c-3b}{3bc} - \frac{3}{4a}$	
d) $\frac{3a}{6ax^2} - \frac{x}{6a^2x} + \frac{a}{3a^2x^2}$	f) $\frac{2x+5}{x+2} - \frac{6x+2}{3(x+2)}$
e) $\frac{2x^2-x+2}{x^2y} - \frac{2x-1}{yx}$	

8. Hozd közös nevezőre:

$$a) \frac{2a-1}{a+1} - \frac{3a}{2a+2} + \frac{a}{4}$$

$$d) \frac{2t+5}{3t+9} - \frac{t-4}{6t+18} + \frac{3t-2}{2t+6}$$

$$b) \frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b}$$

$$e) \frac{3a+b}{2a+2b} + \frac{a-2b}{4a+4b} - \frac{5a-b}{3a+3b}$$

$$c) \frac{5b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$$

$$f) \frac{7x}{a^2-9} - \frac{5x}{a-3} + \frac{x}{a+3}$$

$$g) \frac{7a+2b-1}{2a^2+6a} + \frac{5-3a+2b}{a^2-9} - \frac{a-2b}{a-3}$$

$$h) \frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a+2}{2a^2-2}$$

$$j) \frac{a+3}{a^2-4} + \frac{2}{a+2} - \frac{3a+1}{a^2+4a+4}$$

$$i) \frac{5}{2x^2+6x} - \frac{4-3x^2}{x^2-9} - 3$$

$$k) \frac{5-b}{b^2-8b+16} + \frac{6}{5b-20}$$

$$l) \frac{3a+2}{a^2+2a+1} - \frac{6}{a^2-1} - \frac{3a-2}{a^2-2a+1}$$

$$m) \frac{1}{2x^2+3xy} + \frac{7}{8x^2-18y^2} - \frac{1}{4xy-6y^2}$$

$$n) \frac{1}{a-b} + \frac{a+2b}{a^2-ab} + \frac{a-b}{a^2}$$

$$o) \frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab+b^2} - \frac{a^2}{a^2+ab}$$

$$9. \quad a) \frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2} \quad c) \frac{2x+5}{8x^3-125} - \frac{1}{4x^2-10x+25}$$

$$b) \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$$

$$d) 2x-1 + \frac{2x-2x^4}{x^3-1}$$

$$e) \frac{a^2-ax-x^2}{x^3-a^3} + \frac{1}{x-a} + \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

10. Szorzás-osztás:

$$a) \frac{x^2y-4y^3}{3xy^2} : \frac{x^2-2xy}{x^2y}$$

$$e) \frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a^2+5a}{a^2-9}$$

$$b) \frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy}$$

$$f) \frac{a^2-4b^2}{a^2-ab} : \frac{a-b}{a^2+2ab}$$

$$c) \frac{x+2t}{y-2t} : \frac{x^2-4t^2}{5x+10t}$$

$$g) \frac{6x+6y}{5x-5y} : \frac{2x+2y}{3x-3y}$$

$$d) \frac{x^2-xy}{x^2+xy} : \frac{x^2y}{xy}$$

$$h) \frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2} : \frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} \quad \frac{5x^2 - 10yx}{x^2 + 4y^2} \cdot \frac{x^4 - 16y^4}{15(x - 2y)^2} & \text{j)} \quad \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{10x^2 - 10y^2} \cdot \frac{8x - 8y}{2x^2 - 4xy + 2y^2} \\
\text{k)} \quad \frac{36a^2 - 1}{12} \cdot \frac{6a - 1}{216a^3 - 108a^2 + 18a - 1} & \\
\text{l)} \quad \frac{x^4 - y^4}{a^3 + b^3} : \frac{x^2 - y^2}{a^2 - ab + b^2} & \text{m)} \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 + b^3} : \frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab + b^2} \\
\text{n)} \quad \frac{x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3}{x^3 - a^3} : \frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 + ax + a^2} & \\
\text{o)} \quad \frac{4x^2 - 1}{8x^3 + 1} : \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 2x + 1} &
\end{array}$$

11. Emeletes tört:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} & \text{d)} \quad \frac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}} & \text{f)} \quad \frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}} \\
\text{b)} \quad \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} & & \text{g)} \quad \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \right)^{-2} \\
\text{c)} \quad \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2}} & \text{e)} \quad \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}} & \text{h)} \quad \left(\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \right)^{-1}
\end{array}$$

7.3 Egyenletek

1. Zárójel felbontással:

$$\begin{array}{l}
\text{a)} \quad (x+1)(x-2) + (x+3)(x-3) = (x-1)(x+2) + (x+3)^2 \\
\text{b)} \quad (2x+1)^2 - (x+2)^2 = (3x+1)^2 - (x-3)^2 - 5x^2 - 7 \\
\text{c)} \quad 5(x-1)^2 - 2(x+3)^2 = 3(x+2)^2 - 7(6x-1) \\
\text{d)} \quad 5x - (4x+3)^2 = -3x(5x+3) - x^2 + 20 \\
\text{e)} \quad 3(x+1)^2 + (x-4)^3 = 101 + (x-3)^3 \\
\text{f)} \quad 2(x-1)^3 - 3(2x+5) = 2(x+1)^3 - 4x(3x+2) \\
\text{g)} \quad (x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1)
\end{array}$$

2. Törtös egyenletek:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \quad 1 - \frac{2x}{3} = 2x - 1 & \text{c)} \quad 2\frac{1}{3}x + \frac{2}{7}x = 2 - \frac{1}{7}x \\
\text{b)} \quad \frac{y}{4} - \frac{y}{3} = \frac{y}{4} - \frac{y}{5} + 1 & \text{d)} \quad \frac{5-x}{8} = \frac{18-5x}{12}
\end{array}$$