

1. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

- a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvonnának, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?
- b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?
- c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)
2. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?
3. Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

- a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$
 b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$
 c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

4. A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

- a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!
 Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a **tengerjáró hajót**, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.
- b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

5. Adott két párhuzamos egyenes, e és f . Kijelölünk e -n 5, f -en pedig 4 különböző pontot.

- a) Hány (e -től és f -től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?
 Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?
 Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?
- b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?

6. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n - 1)$ -edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$).

- a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!
 A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.
- b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?
 A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.
- c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában?

7. Egy üzemben 4000 cm^3 -es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománccfestékekkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)
- Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománccfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai $6,4 \text{ cm}$ magasak!
 - Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománccfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!
 - Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: $0,02$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes?
8. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os.
9. a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!
- Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
 - Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.
- b) Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?