

1. Hány olyan 6-ra végződő négyjegyű szám van, amely osztható 3-mal?
2. Mennyi azoknak a háromjegyű számoknak az összege, amelyeknek minden jegye páratlan?
3. A táblára felírtuk a 0-tól 2003-ig terjedő egész számokat (tehát összesen 2004 db számot). Mekkora a táblán lévő számjegyek összege?
4. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is?
5. Mennyivel több hatjegyű szám van a tízes számrendszerben, mint a hármas számrendszerben?
6. Mennyivel több legfeljebb ötjegyű szám van a nyolcas számrendszerben, mint a hatos számrendszerben?
7. Tekintsük a csupa 1-es vagy 2-es számjegyet tartalmazó n -jegyű számokat! Ezen számok közül (adott n érték esetén) A_n -nel jelöljük azoknak a számát, amelyek azonos számú 1-es és 2-es számjegyekből állnak, B_n pedig legyen azok száma, amelyek több 1-est tartalmaznak, mint 2-est. Van-e olyan érték, amelyre $A_n = B_n$?
8. Hány olyan négyjegyű egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is?
9. Hány olyan legfeljebb 5 jegyű, 5-tel nem osztható természetes szám van, amelynek minden jegye prím?
10. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy?
11. Egy kalapban 2002 cédula van az 1, 2, 3, ..., 2002 számokkal. Hányat kell becsukott szemmel kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük két olyan szám, amelyek összege osztható 5-tel?
12. 1990 papírlapra ráírtunk 1-1 számot. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 45 lap úgy, hogy vagy mindegyikre azonos, vagy mindegyikre különböző szám van írva!
13. Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható 200-zal!
14. Mely x, y, z racionális számok esetén lesz az alábbi kifejezés értéke racionális?

$$\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$$

15. Négy valós számból páronként kéttagú összegeket képzünk. A hat összeg közül négy darab racionális, kettő irracionális. Bizonyítsd be, hogy ekkor az eredeti négy szám összege racionális!
16. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számokra igaz, hogy az $x + y + xy$ racionális szám, $x^4 + y^4$ pedig irracionális szám, akkor xy csak irracionális szám lehet.
17.
 - a) x és y olyan valós számok, hogy $x + y$ és $x - y$ is racionális. Igaz-e, hogy ekkor x és y is racionális?
 - b) x és y olyan valós számok, hogy az $x + y$ és xy is racionális. Igaz-e, hogy ekkor x és y is racionális?
 - c) Milyen $(x; y)$ számpár esetén teljesül?

$$(\sqrt{18} - 4)x + (\sqrt{8} - 2)y = \sqrt{50} - 8$$

18. Adjon meg olyan $r_1; r_2; r_3$ racionális számokat, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = r_1 + r_2 \cdot \sqrt{2} + r_3 \cdot \sqrt{6}$$

19.
 - a) Ha $a = 1 + 2\sqrt{3}$, és $b = 1 - 2\sqrt{3}$, mutassuk ki, hogy $a + b$, $a \cdot b$ és $a^3 + b^3$ racionális számok.
 - b) Legyen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $a + b \in \mathbb{Q}$ és $a \cdot b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Mutassuk ki, hogy $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \in \mathbb{Q}$.
20. a) Ha $a, b \in \mathbb{R}$, úgy hogy $a + b = 2$, akkor mutassuk ki, hogy

$$\sqrt{a^2 + 8b} + \sqrt{b^2 + 8a} \geq |a - b|$$

- b) Keressétek meg azokat az $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ számpárokat, amelyekre $\sqrt{m^2 + 8n}$ és $\sqrt{n^2 + 8m}$ egyidőben racionálisak.
21. Az a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre az $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ tört értéke racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ egész szám!
22. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?
23. Igaz-e, hogy négy irracionális szám között mindig van három olyan, melyek összege is irracionális szám?