

1. Mely  $x, y, z$  racionális számok esetén lesz az alábbi kifejezés értéke racionális?

$$\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$$

2. Négy valós számból páronként kéttagú összegeket képziünk. A hat összeg közül négy darab racionális, kettő irracionális. Bizonyítsd be, hogy ekkor az eredeti négy szám összege racionális!
3. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $x$  és  $y$  valós számokra igaz, hogy az  $x + y + xy$  racionális szám,  $x^4 + y^4$  pedig irracionális szám, akkor  $xy$  csak irracionális szám lehet.
4. a)  $x$  és  $y$  olyan valós számok, hogy  $x + y$  és  $x - y$  is racionális. Igaz-e, hogy ekkor  $x$  és  $y$  is racionális?  
b)  $x$  és  $y$  olyan valós számok, hogy az  $x + y$  és  $xy$  is racionális. Igaz-e, hogy ekkor  $x$  és  $y$  is racionális?  
c) Milyen  $(x; y)$  számpár esetén teljesül?

$$(\sqrt{18} - 4)x + (\sqrt{8} - 2)y = \sqrt{50} - 8$$

5. Adjon meg olyan  $r_1; r_2; r_3$  racionális számokat, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = r_1 + r_2 \cdot \sqrt{2} + r_3 \cdot \sqrt{6}$$

6. a) Ha  $a = 1 + 2\sqrt{3}$ , és  $b = 1 - 2\sqrt{3}$ , mutassuk ki, hogy  $a + b$ ,  $a \cdot b$  és  $a^3 + b^3$  racionális számok.  
b) Legyen  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  úgy, hogy  $a + b \in \mathbb{Q}$  és  $a \cdot b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Mutassuk ki, hogy  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \in \mathbb{Q}$ .
7. a) Ha  $a, b \in \mathbb{R}$ , úgy hogy  $a + b = 2$ , akkor mutassuk ki, hogy

$$\sqrt{a^2 + 8b} + \sqrt{b^2 + 8a} \geq |a - b|$$

- b) Keressétek meg azokat az  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  számpárokat, amelyekre  $\sqrt{m^2 + 8n}$  és  $\sqrt{n^2 + 8m}$  egyidőben racionálisak.
8. Az  $a, b, c$  olyan pozitív egészek, amelyekre az  $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$  tört értéke racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$  egész szám!
9. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?
10. Igaz-e, hogy négy irracionális szám között mindig van három olyan, melyek összege is irracionális szám?