

1. a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $f(x) = \frac{1}{2}|x - 4| + 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!(4p)
 b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét!(2p)
 c) Forgassuk meg a $[0;4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét!(8p)
2. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 2 cm, magassága 3 cm. Határozd meg a leghosszabb testátló és
 a) a magasság hajlásszögét, (5 pont)
 b) e testátló végpontjából induló oldallap lapátlójának hajlásszögét, (6 pont)
 c) e testátló végpontját a szemközti alapon ugyanezen testátló másik végpontja mellett lévő csúccsal összekötő egyenes hajlásszögét. (5 pont)
3. Egy gúla alaplapja négyzet, oldallapjai egybevágó, egyenlő szárú háromszögek. A gúla magassága 30° -os szöget zár be a gúla oldallapjaival. Írjunk a gúlába kockát úgy, hogy a kocka 4 csúcsa a gúla alaplapjára illeszkedjen, másik 4 csúcsa pedig az oldallapokon helyezkedjen el úgy, hogy a gúla csúcsából kiinduló magasságvonalakra essen! Számítsd ki a gúla és a kocka térfogatának arányát! (16 pont)
4. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.
 a) Mekkora a háromszög hegyesszögei?(3p)
 A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.
 b) Milyen hosszú a PB szakasz?(6p)
 Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm.
 c) Mekkora az ABCD tetraéder térfogata?(4p)
5. 2007 május/9(16p)
6. A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.
 a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő számítás relatív hibájának.)(3p)
 b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatára, a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott, közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke!(7p)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f(x) = 25 \cdot \frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1}$

 c) Igazolja, hogy f -nek nincs szélsőértéke!(6p)
7. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát!(16p)
8. Az ABCDE szabályos négyoldalú gúla alaplapja az ABCD négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnak, G pedig a DE oldalélnak a felezőpontja. Az ABFG négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?(16p)
9. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36 \cdot \sqrt{2}$ egység.
 a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával?(4p)
 b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)(3p)
 c) Az alapél és a testátló hosszát, ebben a sorrendben, tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak második tagja!(4p)

10. Az ABCDEFGH téglatest A csúcsból induló élei: $AB=12$; $AD=6$; $AE=8$. Jelölje a HG él felezőpontját P.
 - a) Számítsa ki az ABCDP gúla felszínét!(10p)
 - b) Mekkora szöget zár be az ABCDP gúla ABP lapjának síkja az ABCD lap síkjával?(3p)
11. Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros. Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata?(16p)
12. Egy háromszög oldalainak hossza 6 cm, 25 cm, 29 cm. Megforgatjuk a háromszöget a leghosszabb oldala körül, illetve a hosszúság szerinti középső oldal körül.
 - a) Határozzuk meg a keletkező forgástestek térfogatának arányát, és igazoljuk, hogy az arány racionális szám!
 - b) Számítsuk ki a testek térfogatát!
13. Egy téglatest alakú dobozt szeretnénk becsomagolni. Tudjuk, hogy az egyik lapja 2500cm^2 területű, térfogata pedig 75 liter. Hány m^2 területű az a minimális papírmennyiség, amelynél már létezik olyan méretű téglatest a mondott feltételek mellett, hogy be tudjuk csomagolni a dobozt?
14. A 600cm^2 felszínű téglatestek közül melyiknek lesz a) legkisebb a testátlója, b) legnagyobb a térfogata?
15. Egy 24cm oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le. Mekkora legyenek a levágott négyzetek, hogy az oldaltéglalapok felhajtatásával létrejött nyitott doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen? Mekkora a feladatban leírt módon elérhető maximális doboztérfogat?
16. A $2\pi\text{ dm}^2$ felszínű egyenes körhengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb? Mennyi ez a maximális térfogat?
17. A $\pi\text{ dm}^3$ térfogatú egyenes körhengerek közül melyiknek a felszíne a legkisebb? Mennyi ez a minimális felszín?
18. Egy szabályos háromszög alapú gúla alapéle 8 cm, oldaléleinek hossza pedig 5 cm. Mekkora a köré írt gömb sugara?
19. Az egységsugarú gömbbe írt forgáshengerek közül melyiknek a térfogata lesz a legnagyobb?
20. Egységnyi sugarú gömb köré forgáskúpot írunk.
 - a) Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelyiknek a felszíne a legkisebb?
 - b) Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelyiknek a térfogata a legkisebb?
21. Tekintsük az egységsugarú gömbbe írt téglatesteket!
 - a) Melyiknek a felszíne lesz maximális?
 - b) Melyiknek a térfogata lesz maximális?
22. Egy tetraéder oldallapjai olyan egybevágó háromszögek, melynek oldalai rendre 13 cm, 14 cm és 15 cm hosszúak.
 - a) Mekkora a tetraéder térfogata?
 - b) Mekkora a tetraéder beírt gömbjének a sugara?
23. Egy téglatest térfogata 216cm^3 , felszíne 252cm^2 , egy csúcsból induló élei egy mértani sorozat egymást követő elemei.
 - a) Mekkora az egy csúcsból induló élei?(9p)
 - b) Mekkora az egy csúcsból induló élek hosszának a szórása?(3p)
24. Egy téglatest térfogata 960dm^3 , az egy csúcsból induló élei egy számtani sorozat egymást követő elemei. Ezen élhosszúságok összege 36 dm.
 - a) Mekkora a téglatest felszíne?(8p)
 - b) Mekkora a téglatest testátlója?(3p)