

1. Egyszerűsítse a következő kifejezést:
 - a) $\frac{\sin^2 x + \sin x - 2}{\sin x + 2 + 2 \cos x + \sin x \cos x}$
 - b) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ?$ ha $\tan x = \frac{1}{3}$
 - c) $\frac{2^{35} + 3 \cdot 2^{33} + 2^{32}}{3 \cdot 2^{33} - 2^{32}}$
2. $\sin^2 x + \sqrt{2} \cos x - 1,5 \geq 0$
3. $\tan x - 6 + 8 \cot x = 0$
4. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$
5. $x + y = ?$, ha

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a \\ \cos x - \sin y = b \\ a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$
6. $\begin{cases} \frac{1}{1+tgx} + \frac{1}{1+ctgx} = xy \\ xy + 4 = 2(x+y) \end{cases}$
7. $1 - x^2 - x^4 = 4^{\sin^2 x}$
8. Biz. be: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2006^2} \geq \frac{6019}{4014}$
 Útmutatás: $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k+1)}$
9. Egy háromszög két szöge 45° , illetve 30° . Hány fokok szöget zár be a két szög csúcsát összekötő egyenes a 45° -os csúcsból kiinduló súlyvonallal?
10. Bocsássunk merőlegeseket egy egyenlő szárú háromszög alapjának tetszőleges pontjából a száraira. Igazolja, hogy a két merőleges szakasz összege állandó.
11. Szabályos háromoldalú gúla alaplapijának tetszőleges pontjából bocsássunk merőleget az oldallapokra. Igazolja, hogy a kapott merőleges szakaszok összege állandó.
12. Háromszög egyik oldala egy félkör átmérője, a harmadik csúcs a félköríven van. Az átmérőn fekvő egyik szög 40° . Mekkora az átmérővel szemközti szög?
13. $x + 2y + 3z = 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y-1} + \sqrt{3z-1})$
14. $x^2 + x + 3\sqrt{x^2 + x + 2} = 8$
15. Egy háromszögben: $R \cdot (a+b) = c \cdot \sqrt{a \cdot b}$. Leghosszabb oldala 1. Mekkora a területe?
16. Az ABC háromszögben hol kell felvenni azt az oldalaktól x;y;z távolságban lévő P pontot, hogy az xyz szorzat maximális legyen!
17. Határozd meg azt a minimális területű rombuszt, amely beírható körének sugara 5 cm!
18. Biz.be: $a; b; c \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$
19. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \frac{4+9x^2}{x} \rightarrow \min$
20. $|x^2 - 11x + 28| + |x^2 - 15x + 54| = 2$
21. $4^{x+1} + 2 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 2^x = 0$
22. $3^{3x-1} + 27^x = 2^{2x-1} + 7 \cdot 4^x$
23. $4^{tg^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 80$
24. $2 \cdot \log_{x+1} x + \log_{x+1} [7(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 9(x + \frac{1}{x}) - 32] = 4$
25. $\frac{(x-1)^2}{16} \leq \log_5 x$
26. $\log_{\sin x} (1 - \cos^2 x) = 2^{\sqrt{4-x^2}}$
27. $\log_x (x^2 + x - 4) < 1$
28. $(4 - \cos 8x)(2 + \cos^2 x) = 15$
29. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 16}} = x - 1$
30. $(x - \sqrt{x-2} - 2)(x - \sqrt{x-3} - 3) = 0$
31. Oldja meg: a) $13 - (x-1)^2 \geq 4|x+1|$ b) Mekkora a két görbe által meghatározott síkidom területe?
32. $x \cdot (\frac{x-3}{3})^2 + \frac{1}{3}(x+2)(x-2) = \frac{1+(x-1)^3}{9}$
33. $4^{x+1} + 2 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 2^x = 0$
34. $|x+3| + |x-4| - |x+5| = 0$
35. $2x - 3y + xy = 10 \quad x; y \in \mathbb{Z}$
36. $xy^2 + 2xy + x - 243y = 0 \quad x; y \in \mathbb{Z}^+$
37. Milyen p-re nincs közös pontja az $f(x) = -2px - 5$ és a $g(x) = (p+12)x^2 - 4$ függvényeknek?
38. Mely valós p-re teljesül, hogy a $2x^2 - (p+7)x + p+5 = 0$ esetén $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 3$?
39. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
40. a) $2x^4 \leq x^2 + 1$ b) $2 \cdot \cos^2 x \geq \cos x + 1$
41. $\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x - 6y = 0 \\ xy - x + y = 0 \end{cases}$
42. $\begin{cases} 2^{3x+2} = 4y^3 - 407y + 20 \\ x = \log_2(y-4) \end{cases}$
43. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amire teljesül: $\begin{cases} (x^2 + 5)^2 = 25 - |y-3| \\ 21x + 63y = 188 \end{cases}$
44. $|45x - 8| + 7 \cdot 2^{x+4} + \log_2^2(x-2) + \sqrt{4x+2009} = 2010$
45. $(1 + \sqrt{x-2})(x^2 - 4x + 5) = 1$
46. $(1 + \sqrt{x-3})(x^2 - 4x + 5) = 1$
47. $(1 + \sqrt{y-3})(x^2 - 4x + 5) = 1$
48. a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > -1$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) < -2$
49. a) $\sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}$ b) $\log_{x+5}(x^2 - 9x + 14)$ c) $\mathbb{D}_a \setminus \mathbb{D}_b =$
50. $x^2 \cdot \log_4(5x^2 - 2x - 3) - x \log_{\frac{1}{4}}(5x^2 - 2x - 3) \leq x^2 + x$
51. $\log_x(y-2) + \log_{y-2} x = \sqrt{4 - 4x^2 + 4xy - y^2}$
52. $\frac{6x-18}{3-x} + (x-2)^2 + \sqrt{4-4x+x^2} = 0$
53. $27^x < 6 \cdot 9^x + 3^{x+3}$

54. a) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $\cos x = \frac{|x|}{2\pi}$
55. a) $\sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4} = \log_2\left(\frac{4}{x}\right)$ b) $2 - \sin x = \sqrt{5 - \cos^2 x - 4 \sin x}$
56. $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 0 \\ 6x + 6y + 5xy = 0 \end{cases}$
57. $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \begin{cases} x^2 - 4y^2 - 7x + 14y = 0 \\ xy + x + 2y = 0 \end{cases}$
58. $\begin{cases} 4^{\frac{x+y}{1004}} - 4^{\frac{x+y}{2006}} = 12 \\ 2007^{\log_x(2008y-x)} = 1 \end{cases}$
59. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36$
 $D_f = ?$ b) $\sqrt{x^2 - 15x + 36} + \sqrt{-x^2 + 19x - 84} + \log_{\frac{x}{2}} 36 = 2 \cos 3z - y^2 + 4y - 4$
60. $\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})^x} + \sqrt{(7 - 4\sqrt{3})^x} = \frac{5}{2}$
61. $\sqrt{(31 - 8\sqrt{15})^x} + \sqrt{(31 + 8\sqrt{15})^x} = \frac{10}{3}$
62. $\begin{cases} (x+y)(x-4y+11) = x-4y+11 \\ (4x-y)(2x-3y-8) = 16(2x-3y-8) \end{cases}$
63. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3xy + 4} + x(x-3y) = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
64. $\cos^2 x \cdot (2 \cos^2 x + 1) = \frac{105}{128 \cos^4 x + 64 \cos^2 x - 64}$
65. $\log_{4-5x}(4x^2 + 1 - 4x) + \log_{2x-1}(13x - 4 - 10x^2) = 4$
66. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy $\sqrt{x^2 - 2005x - 2006} + \sqrt{x^2 - 2007x + 2006} + \sqrt{x^2 - k^2} = 0$
67. $3 \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = 0$
68. a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{(x+1)^2}} + x + 1 = 0$ b) $\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$
c) $10^{\lg 3x} = 2x - 3$ d) $\sqrt{x-1} \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$
69. $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$
70. a) $\frac{x+3}{3} = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+4x-16} \cdot (x+3)$ b) $\lg(6^x - 96) - 2 = \lg 2 + \lg 6$
71. $\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) = \frac{1}{2} \end{cases}$
72. $\frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 1} = \frac{x+1}{x-2}$
73. Határozza meg a p paraméter értékét, hogy bármely valós x esetén teljesüljön: $\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq p$
74. Milyen m valós paraméter esetén teljesül, hogy a $\sin^2 x + \sin x + 2^m - 4 = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumban?
75. $15 \cdot 3^{2x} - 34 \cdot 15^x + 15 \cdot 5^{2x} = 0$
76. $6 \cdot (2^{3x} + 3^{3x}) = 7 \cdot (2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x})$
77. Igazolja:
 $\left(\sqrt{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt{10 - \sqrt{19}}\right) \left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}\right)^{-2} \in \mathbb{Z}$
78. a) $(\frac{1}{2} + \sin x)^2 + (y^2 + \cos x)^2 = 0$ b) $\sin^2 x + \cos^2 y = 2$
79. a) $2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) = x + \frac{1}{x}$ b) Ábr.: $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$
80. $\sin 2x + 1 = 3 \cdot (\sin x + \cos x) - 2$
81. Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $\sin^4 x + \cos^4 x = k - \frac{1}{4}$ és a $\sin^4 x + \cos^4 x = k + \frac{1}{4}$ egyenletnek is van megoldása!
82. $2 + \cos x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
83. $9 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos x = 4$
84. Magasabbfokú egyenletek I. (szorzat)
- a) $12x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 2x + 24 = 0$
b) $32x^4 - 40x^3 - 140x^2 - 80x - 12 = 0$
c) $60x^4 - 52x^3 - 140x^2 + 52x + 80 = 0$
d) $3x^4 - 6x^3 - 48x^2 + 6x + 45 = 0$
85. Magasabbfokú egyenletek II. ($a = x + \frac{1}{x}$)
- a) $12x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 2x + 24 = 0$
b) $32x^4 - 40x^3 - 140x^2 - 80x - 12 = 0$
c) $60x^4 - 52x^3 - 140x^2 + 52x + 80 = 0$
d) $3x^4 - 6x^3 - 48x^2 + 6x + 45 = 0$
86. **Egyenlet megoldási módszerek, lépések:**
ÉT; ÉK; Szorzat; Másodfokú; Diofantosz; Paraméter
87. a) $3^{2x+1} - 3^{x+2} = 162$ b) $5^x + 0,2^x = 4,8$ c) $4^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$ d) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$ e) $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$
f) $9^{x+\sqrt{x^2+2}} - 4 \cdot 3^{x-1+\sqrt{x^2+2}} = 69$ g) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$ h) $3^{\sqrt[3]{x^2}} = 3 \cdot 3^{\sqrt[3]{x+1}}$ i) $4^{x+1.5} + 4 \cdot 9^{x-1} = 6^{x+1}$
j) $\frac{16^x + 4^{x+1}}{3 \cdot 16^x - 4^{x-1}} = \frac{18}{5}$ k) $3^{2+4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2+2\sqrt{x}} + 27 = 0$ l) $\frac{9^x}{4^x} + \frac{4^x}{9^x} = \frac{13}{6}$ m) $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 2^x - 1} + \frac{2 \cdot 2^x - 1}{3 \cdot 2^x - 1} = \frac{5}{2}$ n) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$ o) $\log_3 x - 6 \cdot \log_x 3 = 5$ p) $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$ q) $2 \cdot \log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3 \cdot \log_{9x} 3 = 0$ r) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$ s) $\log_4^2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$ sz) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$
t) $4^{\log_{3x} 6} - 2^{\log_{3x} 6} - 2 = 0$ ty) $3^{1+\log_{\sqrt{2}} x} - 9^{\log_{\sqrt{2}} x} = 108$ v) $7^{\log_x 9} - 7^{\log_x 3} - 42 = 0$
88. Oldja meg az egyenleteket értékkészlet vizsgálatával!
- a) $3 \sin x + \cos y = 4$ b) $(3 - \sin 6x)(1 + \sin 2x) = 8$
c) $(2 + \sin x)(4 - \cos y) = 15$ d) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = x^2 - 4x + 6$ e) $(\sin x - 2 \sin y)^2 + (2 \cos y - \sqrt{3})^2 = 0$
f) $(\sin x + \cos y)^2 + (\sin y - 1)^2 = 0$ g) $(\sin x + 2 \cos y)^2 + (2 \sin y - 1)^2 = 0$ h) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos y - 2 \sin y = -2$
i) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos y - 4 \sin y + 5 = 0$