

1. **2006 február**

Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében! (6p)

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10p)

2. **2006 május**

a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3; 4]$ intervallumon az $x \rightarrow x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (6p)

b) Legyen az f , g és h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g(x) = x - 3$; $h(x) = |x|$.

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6$.

Készítse el, a fenti példának megfelelően, az f , g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! (A $(g \circ f)(x)$ függvényt nem szükséges újra felírni.) (6p)

c) Keressen példát olyan p és t , a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$! Adja meg a p és a t függvény hozzárendelési szabályát! (4p)

3. **2006 május**

Legyen adott az $f: [-2, 5; 2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit! (4p)

b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából! (6p)

c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (4p)

4. **2006 október**

Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsú fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t) = 12 - \frac{10}{t+1}$ képlet;

a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula: $h(t) = 5 \cdot \sqrt{0,4t+1} + 0,4$.

Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $t \geq 1$, és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsú fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket! (6p)

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot? (4p)

c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a $g(t) = t^3 - 16,5t^2 + 72t + 60$ képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t \leq 21$) (6p)

5. **2007 május**

a) Ábrázolja a $[0; 6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! (3p)

b) Adja meg az $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5; 4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét! (10p)

6. **2007 május**

a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető! (2p)

b) Ábrázolja az $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt! (5p)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén levő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírni.)

A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

B: Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon. (3p)

d) Határozza meg az $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét! (6p)

7. 2007 október

A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő számítás relatív hibájának.)(3p)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatára a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke!(7p)

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f :]-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}$

c) Igazolja, hogy f -nek nincs szélsőértéke!(6p)

8. 2007 október

Adott az f függvény: $f : [-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 4x^3 - 192x$.

a) Határozza meg f zérushelyeit, és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából! Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét.(7p)

b) Határozza meg a c értékét úgy, hogy az x tengely $[0; c]$ szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen!(9p)

9. 2008 május

a)Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.) Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek! Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye! Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!(11p)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!(5p)

10. 2008 május

Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

a_n , ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$

b_n , ahol $b_n = |n - 23| - |n - 10|$

c_n , ahol $c_n = (\sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot n))^2$.

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot! (16p)

11. 2009 május

Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 2$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordináta-rendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x) = g(x)$ egyenlet valós megoldásait!(6p)

b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!(8p)

12. 2009 október

Jancsi vázát készíti. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gombbal levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szinten m magasságú hengerpálástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával. Mekkora legyen a váz magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m , a határoló kör sugara pedig r , akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$.(16p)

13. **2010 május**

Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^3}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)dx = -a^3 + a$.(6p)

b) Mely pozitív valós számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)dx \leq 0$?(4p)

c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?(6p)

14. **2011 május**

A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

- Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?(4p)
- A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?(12p)

15. **2011 október**

- Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott pontok összege prím;
B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.
- Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?
- Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0; 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?