

1. Felbontható-e az $1, 2, 3, \dots, 15$ halmaz egy két elemű A és egy 13 elemű B halmazra úgy, hogy A elemeinek szorzata egyenlő legyen B elemeinek összegével?
2. Lehet-e egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának mértékszáma páratlan természetes szám?
3. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek két oldal mértékszáma páros természetes szám és a harmadik oldal páratlan természetes szám?
4. Bizonyítsuk be, hogy minden pitagoraszí számhármast valamelyik tagja osztható 5-tel.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma egész szám, akkor befogóinak szorzata osztható 12-vel.
6. Határozzuk meg a 84 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok relatív prím számok.
7. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok, és területe 78 egység?
8. Határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy egész számok és a háromszög kerülete 80 egység.
9. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok és kerülete 88 egység?
10. Bizonyítsuk be, hogy nincsen olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalainak mértékszáma egész szám, és területének mértékszáma megegyezik az átfogó mértékszámával.
11. Melyek azok a téglalapok, amelyeknek oldalai pozitív egész számok, és területük és kerületük mérőszáma ugyanaz a pozitív egész szám?
12. Van egy 48 cm és egy 78 cm hosszúságú pálcánk. Ki tudunk-e ezek segítségével mérni a) 54 cm; b) 56 cm hosszúságú szakaszt?
13. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok. Igazoljuk, hogy a háromszög három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a részek területe is egész szám!
14. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^2 - 2 = 3y$

b) $6x - 15y = 14$

c) $x^2y + x^2 - 180 = 0$

d) $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 1463$

e) $xy = 2x - y$

f) $xy + y + x = 114$

g) $x^2 - y^2 = 15$

h) $3x^2 + xy = 201$

i) $x^2 - 2x - y^2 = 7$

j) $3xy - y - 5x = 3$

k) $x + y + xy = 2006$

l) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1991}$

m) $2x^2 + y^2 = 2xy + 2x + 84$

n) $\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1$

o) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2005}$

p) $(x+2)^4 - x^4 = y^3$

q) $3(x-y) = x^2 - xy + y^2$

r) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10$

s) $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 1998$

t) $1998 \cdot x^{1989} + 1989 \cdot y^{1990} = 1991^{1991}$

u) $(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 = 40$

v) $\begin{cases} x^2 + y - z = 100 \\ x + y^2 - z = 124 \end{cases}$

w) $\begin{cases} \frac{z-1}{x} + \frac{z+1}{y} = 1 \\ \frac{z+1}{x} - \frac{z-1}{y} = 1 \end{cases}$

x) $\begin{cases} ab + cd = -1 \\ ac + bd = -1 \\ ad + bc = -1 \end{cases}$

y) $\begin{cases} a + 2b + b^2 + c = 19 \\ ab + ac + bc = 15 \end{cases}$

15. Ha $a + b + c = 0$. Mutassuk meg, hogy $ab + bc + ca \leq 0$!