

1. Határozzuk meg a következő sorok összegét:

- $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2006 + 2007 =$
- $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 =$
- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2006 \cdot 2007} =$
- $\frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \frac{4}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{4}{81 \cdot 85} =$
- $4 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{4})(3^2 - \frac{1}{4})(5^2 - \frac{1}{4}) \dots (2003^2 - \frac{1}{4})}{(2^2 - \frac{1}{4})(4^2 - \frac{1}{4})(6^2 - \frac{1}{4}) \dots (2002^2 - \frac{1}{4})} =$
- $(2003! + 2004!)(\frac{1}{2004!} - \frac{1}{2005!}) =$
- $(\frac{2}{\sqrt{2005} - 1})(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2003} + \sqrt{2005}}) =$

2. Melyik nagyobb az alábbi a és b számok közül? $a = 499 \cdot (\frac{\sqrt{1997} + 1}{\sqrt{1997} - 1} - \frac{\sqrt{1997} - 1}{\sqrt{1997} + 1})$ $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1996} + \sqrt{1997}}$

3. Mely pozitív n -re teljesül?

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = 9$$

4. Az 1988-at felbontottuk néhány természetes szám összegére. Ezeket a természetes számokat köbre emeltük, a köböket összeadtuk és az összeget elosztottuk hattal. Mennyi lesz a hattal való osztáskor kapott maradék?

5. Adott a következő két kifejezés: $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}$ $B = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \dots + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006}$

- Igazoljuk, hogy mindkét kifejezés nagyobb $\frac{1}{2}$ -nél, és kisebb 1-nél!
- Melyik nagyobb A vagy B?

6. Határozzuk meg az $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{1991}{1992!} + \frac{1992}{1993!}$ összeg értékét! Ha ezt az értéket tizedes tört alakjában felírjuk, milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 1993. helyen?

7. Mutassuk ki, hogy:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2006^2} > \frac{6019}{4014}$$

(Útmutatás: először mutassuk ki, hogy $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)}$)

8. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

$$\text{a) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 3 \quad \text{b) } \frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20n!}{(n-2)!} \quad \text{c) } \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$$

9. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

$$\text{a) } \frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420 \quad \text{b) } \frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000 \quad \text{c) } \frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306 \quad \text{d) } \frac{(2n)!}{n!} < 1000$$

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 3x + 3y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases} & 3. \begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144 \\ x^2 + 4x + 5y = 24 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} 2x + 5xy - y - 14 = 0 \\ 2x^2y - xy^2 + 3 = 0 \end{cases} & 4. \begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y^2 + xy + y = 20 \end{cases} \end{array}$$

5. Milyen p valós számok esetén teljesül minden valós x -re a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq p$$

6. Az a paraméter mely értékei esetén van pontosan egy olyan $(x; y)$ számpár, amely megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$