A feladatok megoldása

(A hivatkozások C jelölései a cikk egyenleteire utalnak.)

1. feladat A beérkezési lépcső felszíne fölött M magasságban indul a mozgás, esési ideje $t = \sqrt{2M/g}$. Ezalatt a labda vízszintesen ut utat, azaz $\sqrt{2Mu^2/g}$ távolságot tesz meg, ami az L lépcsőhossz $\sqrt{2Mu^2/(gL^2)} = \sqrt{2m/H}$-szerese. A $H/2m$ kombináció a továbbiakban sok összefüggésben előfordul. A feladat megadja annak szemléletes jelentését: minél nagyobb $H/2m$, annál rövidebb az előző lépcsőfok végéről vízszintesen induló hajítás első becsapódásának relatív távolsága.

2. feladat A fixpontokra vonatkozó egyenletek (C5)-(C7)-ből:

$$v^* = k\sqrt{v^{*2} + 2mHN^*}, \tag{1}$$

$$N^* = \left[x^* + \frac{1}{H}\left(v^* + \sqrt{v^{*2} + 2mHN^*}\right)\right], \tag{2}$$

$$x^* = x^* + \frac{1}{H}\left(v^* + \sqrt{v^{*2} + 2mHN^*}\right) - N^*. \tag{3}$$

Az (1)-ben levő négyzetgyököt behelyettesítve (3)-ba

$$v^* \frac{1+k}{k} = HN^*. \tag{4}$$

Ezt (1)-be visszaírva:

$$v^{*2}(1-k^2) = k^2 2mHN^* = k^2 2mHv^* \frac{1+k}{Hk} = 2mk(1+k). \tag{5}$$

Ebből (C8), majd (C9) következik. Érdekes, hogy N^* csak m/H-től függ.

A (C7) egyenletből ezekkel azt kapjuk, hogy

$$N^* = [x^* + N^*], \tag{6}$$

ami nem határozza meg x^*-ot, csak annyit jelent, hogy x^* nem lehet nagyobb 1-nél.

3. feladat Ennek feltétele (C10) alapján az, hogy $k_N > 0$, vagyis $H > 2m/N$.

4. feladat A sebességfixpontok a (C8), (C10) egyenletekből

$$v_N^* = NH/2 - m. \tag{7}$$

A sebesség tehát egyenletesen nő N-nel, és v_N^* is csak diszkrét értékeket vehet fel.

5. feladat Írjuk át a (C10) egyenletet a

$$k_N = \frac{NH/2m + 1 - 2}{NH/2m + 1} = 1 - \frac{2}{NH/2m + 1} \tag{8}$$

formába. Ha N nagy, a nevezőben az 1 additív tag elhanyagolható, és megkapjuk (C11)-et. Érdemes megjegyezni, hogy ugyanez az összefüggés *minden* N-re érvényes, ha $H \gg 1$. Hosszú lépcsőkre ugyanis a lépcsőkön átívelő pattogások csak 1-hez közeli ütközési együtthatóval lehetségesek.

6. feladat A ciklusértékeket jelöljük x_1, x_2, v_1, v_2-vel. A megfelelő N_n értékek legyenek $N_1 = N$ és $N_2 = K$. Elsődleges célunk most rögtön a kétindexes $k_{N,K}$ spektrum meghatározása, azon ütközési paraméterértékeké, ahol az attraktor N majd K hosszúságú ugrásokból áll, s ez ismétlődik. Mivel az 1-es indexű pontok a 2-es indexűekbe képződnek, majd vissza, a kettes ciklusok egyenletei (C5)-ből és (C7)-ből:

$$v_2^2 = k^2(v_1^2 + mH\ N), \quad v_1^2 = k^2(v_2^2 + 2mH\ K), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{1}{H}\left(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2mH\ N}\right) - N, \\ x_1 - x_2 &= \frac{1}{H}\left(v_2 + \sqrt{v_2^2 + 2mH\ K}\right) - K, \end{aligned} \tag{10}$$

Ez utóbbi két egyenletet összeadva, és a gyököket az első egyenletpárból beírva:

$$(v_1 + v_2)\frac{1+k}{k} = H\ (N + K). \tag{11}$$

A (9) egyenletekből az egyes sebességekre:

$$v_1^2 = \frac{2mH}{1-k^4}k^2(k^2N + K), \quad v_2^2 = \frac{2mH}{1-k^4}k^2(N + k^2K). \tag{12}$$

Ezeket (11)-be helyettesítve, és az ütközési együtthatót most már $k_{N,K}$-val jelölve azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{1+k_{N,K}}{(1-k_{N,K})(1+k_{N,K}^2)}}\left(\sqrt{k_{N,K}^2 N + K} + \sqrt{N + k_{N,K}^2 K}\right) = \sqrt{\frac{H}{2m}}(N+K), \quad N, K = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Adott N, K mellett az ebből az irracionális egyenletből kapott fizikailag értelmes (azaz 0 és 1 közé eső valós) $k_{N,K}$ értékek alkotják a kettes ciklusok ütközésiegyüttható-spektrumát. Vegyük észre, hogy ezek az értékek továbbra is csak az $H/2m$ aránytól függnek.

Érdemes megfigyelni azt is, hogy $N = K$ esetén visszakapjuk (C10)-et, azaz $k_{N,N} = k_N$. Továbbá tetszőleges N és K számpárokra igaz, hogy $k_{N,K} = k_{K,N}$.

7. feladat Az $N = 1$, $K = 0$ értékeket (13)-ba helyettesítve

$$\sqrt{\frac{(1+k_{1,0})^3}{(1-k_{1,0})(1+k_{1,0}^2)}} = \sqrt{\frac{H}{2m}}. \tag{14}$$

8. feladat Az u vízszintes, v_i függőleges indulási sebességgel induló ferde hajítás távolsága $\Delta x_0 = 2uv_i/g$. A függőleges becsapódási sebesség nagysága megegyezik a kezdeti v_i-vel, s az ütközés után kv_i-ra vált. Az ezzel a függőleges és u vízszintes sebességgel történő ferde hajítás elmozdulása $\Delta x_1 = 2kuv_i/g$. A j-edik ütközés után $\Delta x_j = 2k^j uv_i/g$. A végtelen sok ütközés alatti teljes elmozdulás

$$\Delta x = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta x_j = \frac{2uv_i}{g}\sum_{j=0}^{\infty} k^j = 2\frac{uv_i}{g(1-k)}.$$

A Δx elmozdulást L, a v_i sebességet u egységekben mérve megkapjuk (C12)-t.

9. feladat Az u sebességű vízszintes hajítás távolsága M magasságból $\sqrt{2Mu^2/g}$. A becsapódási sebesség $\sqrt{2Mg}$, ezért az elpattanási indulási sebesség $v_i = k\sqrt{2Mg}$. L és u egységekben ezek

$$x_i = \sqrt{\frac{2Mu^2}{gL^2}} = \sqrt{\frac{2m}{H}}$$

(l. az 1. feladatot) és

$$v_i = k\sqrt{\frac{2Mg}{u^2}} = k\sqrt{2mH}$$

lesznek. (C13)-ba behelyettesítve, s az egyenlőséget véve megkapjuk (C14)-et.

10. feladat A (C13) egyenlőtlenségben a v_i helyére a $v^* = 2mk/(1-k)$ értéket, x_i helyett 1/2-et írva a

$$\frac{8m}{H}k < (1-k)^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Grafikusan ez a feltétel egy $k = 1$-hez tartozó minimumú, álló parabola és egy pozitív meredekségű egyenes első metszéspontjától az origó felé eső tartománynak felel meg. Ha az $1-(2+8m/H)k+k^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit $k_\pm$-szal jelöljük ($k_- < k_+$), akkor a csúszási megoldások a $(0, k_-)$ intervallumban fordulhatnak elő. k_- tehát az az ütközési együttható, amely fölött a csúszási megoldás nem jelenik meg hosszú távon, itt csakis a pattogó mozgás lehet attraktor. A másodfokú egyenletet megoldva

$$k_- = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{8m}{H} - \sqrt{4 + \frac{8m}{H}}\sqrt{\frac{8m}{H}}\right).$$

Alapesetünkben $8m/H = 1$, s $k_- = (3-\sqrt{5})/2 = 0,382$, ami a kerekítés után megegyezik (tehát jó közelítése) a numerikusan kapott értékkel (csak a következő tizedesjegyben van eltérés).

11. feladat Legyen x_0, v_0 a kezdőfeltétel (az egyik lépcsőről a másikra való ugrás után), az ezutáni koordináták pedig rendre: $x_1, v_1, \ldots\ x_j, v_j$. Utóbbiak mind ugyanazon a lépcsőn vannak, ezért $N_0 = N_1 = N_{j-1} = 0$. A következő ugrással a test egy lépcsővel lejjebb kerül, azaz $N_j = 1$. Ezzel visszakerülünk a leképezésben a kiindulási koordinátákhoz, azaz: $x_n = x_0, v_n = v_0$. Az (C5) rekurzió szerint az első j lépés egyszerű csillapodó pattogás, így a sebesség függőleges komponense:

$$v_1 = kv_0,\ \ v_2 = kv_1 = k^2v_0,\ \ ,\cdots, v_j = k^jv_0.$$

Az utolsó lépés utáni elpattanási sebességet, azaz $v_j = k^jv_0$-t, (C5)-be helyettesítésével kapjuk:

$$v_{j+1} = k\sqrt{k^{2j}v_0^2 + 2mH}.$$

Mivel ez a v_{j+1} nem más, mint v_0, innét következik, hogy a ciklus kezdősebessége:

$$v_0 = k\frac{\sqrt{2mH}}{\sqrt{1-k^{2(j+1)}}}. \tag{15}$$

Ez azonban csak egyetlen k értékre érvényes, mely az x koordináta visszatérési ($x_{j+1} = x_0$) feltételéből adódik. Az elmozdulások (C7) szerint:

$$\Delta x_0 \equiv x_1 - x_0 = \frac{2v_0}{H},\ \ \Delta x_1 \equiv x_2 - x_1 = \frac{2v_1}{H},\ \ ,\cdots \Delta x_{j-1} \equiv x_j - x_{j-1} = \frac{2v_{j-1}}{H}.$$

A teljes elmozdulás mértani sort alkot:

$$x_j - x_0 = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta x_i = \frac{2v_0}{H}\left(1 + k + \cdots + k^{j-1}\right) = \frac{2v_0}{H}\frac{1-k^j}{1-k}. \tag{16}$$

Az utolsó elmozdulás (C7)-ből:

$$x_{j+1} - x_j = x_0 - x_j = \frac{1}{H}\left(v_j + \sqrt{v_j^2 + 2mH}\right) - 1.$$

A jobb oldalt (16)-ból behelyettesítve, és használva, hogy $v_j = k^j v_0$, azt kapjuk hogy (x_0 eltűnik az egyenletből!):

$$\frac{1}{H}\left(k^j v_0 + \sqrt{k^{2j} v_0^2 + 2mH}\right) + \frac{2v_0}{H}\frac{1-k^j}{1-k} = 1. \tag{17}$$

Helyettesítsük először v_0-t, (15)-öt, a négyzetgyök alatti kifejezésbe:

$$k^{2j} v_0^2 + 2mH = k^{2j} k^2 \frac{2mH}{1 - k^{2(j+1)}} + 2mH = \frac{2mH}{1 - k^{2(j+1)}}.$$

Ezt és v_0-t (17)-be beírva

$$\frac{1}{H}\left(\frac{k^{j+1}\sqrt{mH}}{\sqrt{1-k^{2(j+1)}}} + \frac{\sqrt{2mH}}{\sqrt{1-k^{2(j+1)}}}\right) + 2\sqrt{\frac{2m}{H}}\frac{k}{\sqrt{1-k^{2(j+1)}}}\frac{1-k^j}{1-k} = 1.$$

Átrendezve kapjuk a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - {k'}_j^{2(j+1)}}}\left({k'}_j^{j+1} + 1 + 2\frac{{k'}_j - {k'}_j^{j+1}}{1 - {k'}_j}\right) = \sqrt{\frac{H}{2m}} \tag{18}$$

sajátértékegyenletet azokra az $j+1$-es ciklusokhoz tartozó k'_j értékekre, melyek j azonos lépcsőn történő pattogásból és egy továbbpattanásból állnak. A $j = 1$ eset természetesen megegyezik az $N = 0, K = 1$ kettes ciklussal ($k'_1 = k_{1,0}$, l. (14)). Az összes $j > 1$ ciklus más, és j növelésével egyre kisebb ütközési együtthatóknak felelnek meg. Mivel ilyenkor 1 lépés esik $j+1$ ütközésre, az átlagos lépésszám $\bar{N} = 1/(j+1)$. A 9. ábra fekete pontjai ezeket az ütközési együttható értékeket jelzik. A nagy j határesetben visszakapjuk k_c-t, hiszen ekkor $k^j \to 0$, és (18) átmegy a

$$\frac{1+k_c}{1-k_c} = \sqrt{\frac{H}{2m}}. \tag{19}$$

egyenletbe, ami ekvivalens (C14)-gyel.

12. feladat A k'_j értékek $j \gg 1$-re egymáshoz nagyon közel esnek és k_c-hez tartanak. Mivel szinte folytonosan követik egymást, jelöljük őket k-val, de ne feledjük, hogy ezek az értékek függnek a $\bar{N} = 1/(j+1)$ átlagos ugrásszámtól. Nagy j-re $k^{2(j+1)}$ jóval kisebb, mint k^{j+1}, a (18) gyökkifejezésében ezért $k^{2(j+1)}$ elhagyható. Ugyanakkor k^{j+1} kicsinysége miatt és amiatt, hogy k már nagyon közel van k_c-hez, alkalmazhatjuk a $k^{j+1} = k_c^{j+1} = k_c^{1/\bar{N}}$ közelítést. Így (18) átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$\frac{1+k}{1-k}\left(1 - k_c^{1/\bar{N}}\right) = \sqrt{\frac{H}{2m}}. \tag{20}$$

Annak érdekében, hogy könnyen összevethessük ezt az összefüggést (19)-cel, írjuk át a bal oldalon álló $(1+k)/(1-k)$ törtet az

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k_c+(k-k_c)}{1-k_c-(k-k_c)} = \frac{1+k_c}{1-k_c}\frac{1+\frac{k-k_c}{1+k_c}}{1-\frac{k-k_c}{1+k_c}} \tag{21}$$

alakba. Kihasználva, hogy $x=(k-k_c)/(1+k_c)$ nagyon kicsi, és az $1/(1+x)\approx 1-x$ közelítő azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k_c}{1-k_c}\left(1+\frac{k-k_c}{1+k_c}+\frac{k-k_c}{1-k_c}\right) = \frac{1+k_c}{1-k_c}\left(1+2\frac{k-k_c}{1-k_c^2}\right). \tag{22}$$

Ebben a kifejezésben az első tört (19) szerint éppen $\sqrt{H/(2m)}$, így a (20) egyenlet az

$$\left(1+2\frac{k-k_c}{1-k_c^2}\right)\left(1-k_c^{1/\bar{N}}\right) \approx 1+2\frac{k-k_c}{1-k_c^2}-k_c^{1/\bar{N}}=1 \tag{23}$$

alakra egyszerűsödik. Innét

$$2\frac{k-k_c}{1-k_c^2}=k_c^{1/\bar{N}}. \tag{24}$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$\bar{N}\ln\left(2\frac{k-k_c}{1-k_c^2}\right)=\ln k_c, \tag{25}$$

azaz

$$\bar{N}(k)=\frac{\ln k_c}{\ln\frac{2}{1-k_c^2}+\ln(k-k_c)}. \tag{26}$$

Ezt a közelítő alakot ábrázoltuk a 9. ábrán pontozott vonallal.